УДК 371.337.016:511–028.31

Гроздев С.И.,
Лалева В.,
Русаков А.А.,
Русакова В.Н.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИДАКТИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИНТЕРАКТИВНОЙ СРЕДЫ

Ключевые слова: геометрическое место точек, информационные и коммуникационные технологии, «GeoGebra».

Решению задач на построение, а особенно задач на нахождение геометрических мест точек (ГМТ) в учебном плане геометрии отводится неоправданно малое количество учебных часов. Задачи на нахождение ГМТ чаще всего рассматриваются лишь в рамках факультативов. Между тем такие задачи включают в себя огромные потенциальные возможности для интеллектуального развития, формирования геометрических представлений школьников, поскольку требуют от учащегося независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности, творческого подхода к поиску решения [1–4].

В 8-м классе болгарской средней школы изучается тема «Геометрическое место точек на плоскости» [5]. В ней применяется одно трудноусваиваемое понятие, которое связано с творческой смысловой деятельностью и с важными математическими закономерностями [6].

Решение задач на нахождение ГМТ состоит в доказательстве равенства (совпадения) двух фигур плоскости. Обычно одна из этих фигур (множество точек плоскости) – знакомая геометрическая фигура, а другая задана некоторым свойством. Для нахождения геометрических мест точек обычно рассматриваются два типа задач. В одном случае оба множества даны, и нужно доказать только, что они равны. В другом случае геометрическая фигура, представляющая ГМТ, неизвестна, и нужно сначала найти ее и далее доказать ее совпадение с множеством, заданным каким-либо свойством. Второй тип задач – исследовательский (творческий), и с такими задачами могут справиться только думающие, креативные ученики.

Остановимся на задачах второго типа. Эти задачи дают возможность раскрытия перед учащимися существенных внутренних предметных связей.

Модель решения задач для нахождения ГМТ известна:

– построение достаточного числа точек, имеющих требуемое свойство, или решение задачи в частном случае;
– формулировка и доказательство гипотезы о виде множества точек, которое нужно найти;
– доказательство того, что произвольная точка этого множества имеет нужное свойство.

Первый пункт решения таких задач вызывает объективные трудности у значительного числа школьников: не всегда ученику удается представить (изобразить в тетради) требуемое. Эта часть решения значительно упрощается при использовании интерактивной динамической среды.

Интерактивная геометрическая среда (ИГС) – программное обеспечение, специально разработанное для образовательных целей и позволяющее выполнять на компьютере геометрические построения, состоящие из геометрических объектов, а также задавать соотношения между этими объектами. Примерами разработанных современных ИГС могут служить уже зарекомендовавшие себя в организации учебного процесса: «Живая математика», «Математический конструктор» (1С Репетитор), «GeoGebra», «GEONExT».

Так, в среде «GeoGebra» достаточно построить только одну точку искомого множества, после чего, используя инструмент «Оставлять след» построенной (найденной) точки, получаем искомое ГМТ.

Интерактивная динамическая среда «GeoGebra» применяется для геометрических построений, нахождения (определения) вида ГМТ, а также чтобы найти (уловить) исходную идею для доказательства этого вида ГМТ.

Динамические чертежи являются незаменимым помощником при составлении и доказательстве гипотезы об искомом ГМТ. На каждом этапе учебной деятельности: 1) при знакомстве (до знакомства со способами построения; для выявления сущностных характеристик; в качестве наглядной иллюстрации), 2) во время анализа условий задачи (выявление закономерностей; нахождение граничных условий; проверка гипотез), 3) во время решения задачи (нахождение геометрического места точек; вычисление значений длин, углов, площадей) – можно и, мы считаем, нужно применять ИГС. Дидактические возможности ИКТ: моделирование, простота и скорость сравнительно с традиционными средствами, возможность создания демонстраций, сопровождение учащегося, построение графиков и выполнение математических расчетов. Эти возможности существенно облегчают усвоение материала школьником на каждом этапе учебной деятельности, позволяя превратить процесс решения математической задачи в творческий поиск и существенно развивая навыки самостоятельной работы [7].

Осторожное наблюдение и анализ сохранявшихся величин углов, сегментов, точек, через которые постоянно проходят некоторые прямые, помогает придумать и составить исходную идею доказательства. Использование интерактивных геометрических сред является для школьников более привлекательным занятием по сравнению с использованием традиционных инструментов. ИГС позволяют не просто строить чертежи, но создавать наглядные модели геометрических объектов, способные видоизменяться согласно заложенным при их построении ограничениям.

Усвоение инструментария программной среды «GeoGebra» дает возможность быстро и точно построить эстетические и динамические чертежи, а также возможность наблюдать за динамикой, маркируя отдельные элементы чертежа различными линиями и цветами.

Приведем систему задач (задачи можно найти в книгах [8–10]), которые могут быть более эффективно решены с применением возможностей ИГС, чем традиционными методами. (Предполагаем, что у ученика сформированы умения и навыки построения ГМТ на компьютере в программной среде «GeoGebra». Используются знания о геометрическом месте точек, из которых данный сегмент виден под заданным углом, и понятие равенства фигур на плоскости, использующее геометрические преобразования плоскости.)

Задача 1. Даны отрезок a и угол γ. Построить ГМТ, из которых отрезок виден под углом γ, в программной среде «GeoGebra».

Решение. Последовательно применяя инструменты *«Ползунок»* для установления длины отрезка и величины угла; *«Отрезок с фиксированной длиной»*; *«Угол заданной величины»*; *«Перпендикулярная прямая»*; *«Серединный перпендикуляр»*; *«Пересечение двух объектов»*; *«Окружность по центру и точке»*; *«Дуга по трем точкам»*, строят искомые дуги окружностей k и k', без точек A и B (ГМТ) (рис. 1).

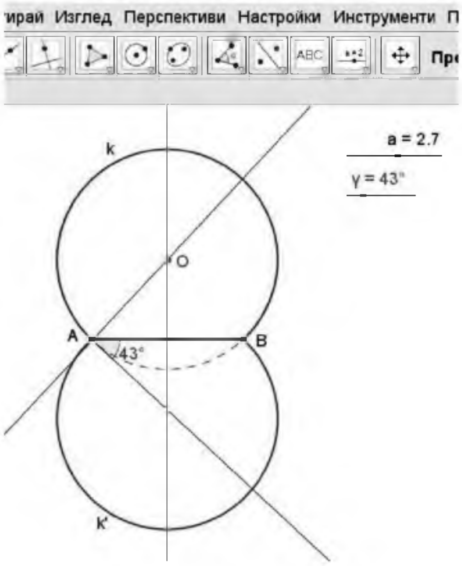


Рис. 1

Посредством «*Ползунка»* возможно изменять величины отрезка или угла и следить за изменением геометрического места точек.

Основная фигура, которая будет принимать участие во всех следующих задачах, содержит отрезок AB, угол γ и точку C, описывающую дугу k, из которой отрезок виден под углом γ.

Введем обозначения: M – точка, описывающая искомое геометрическое место; X – произвольная точка, принадлежащая ГМТ; P – середина дуги k, которая не содержит точку C; S – середина отрезка AB.

Задача 2. Дан отрезок AB и точка C, описывающая дугу k, с которой AB виден под углом γ. Найти ГМТ, состоящее из точек пересечения биссектрисы угла $\angle ACB$ и прямой, проходящей через точки – середины отрезка BC и дуги BC, когда точка C описывает дугу k.

Решение: При помощи инструментов: *«Биссектриса»*; *«Серединный перпендикуляр»* и *«Пере-*

сечение двух объектов»  строим точку пересечения *M* биссектрисы угла $\angle ACB$ и прямой, проходящей через точки – середины отрезка *BC* и дуги *BC*, когда точка *C* описывает дугу *k*. Ставим в точку *M* *«Оставлять след»* и продвинем точку *C* по дуге *k* (рис. 2). Устанавливаем, что $\angle BMP = \gamma$, а его стороны проходят через точки *B* и *P*.

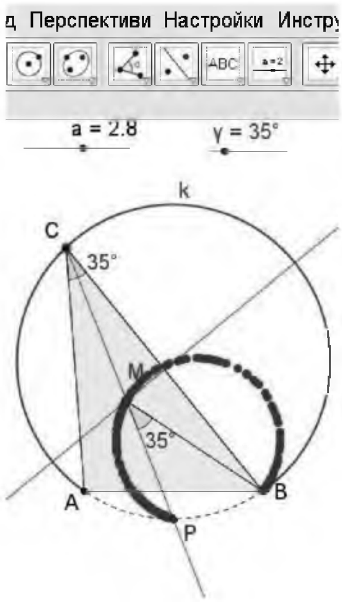


Рис. 2

Гипотеза: ГМТ, состоящим из точек пересечения биссектрисы угла $\angle ACB$ и прямой, проходящей через точки – середины отрезка *BC* и дуги *BC*, когда точка *C* описывает дугу *k*, является дуга окружности, с которой отрезок *BP* (*P* – середина дуги *AB*, не содержащей точку *C*) виден под углом γ.

Доказательство. Пусть *M* – точка пересечения биссектрисы угла $\angle ACB$ и прямой, проходящей через точки – середины отрезка *BC* и дуги *BC*, когда точка *C* описывает дугу *k* (см. рис. 2). Докажем, что $\angle BMP = \gamma$.

Рассмотрим ΔBCM ($BM = CM$), в котором $\angle BCM = \frac{\gamma}{2}$. $\angle BMP = \gamma$, как внешний угол в равнобедренном ΔBCM.

Строим дугу k_1 – ГМТ, с которого отрезок *BP* виден под углом γ (как в задаче 1) (рис. 3).

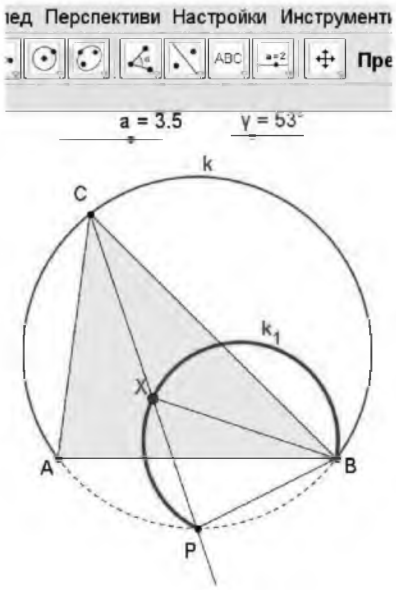


Рис. 3

Выбираем точку $X \in k_1$. Докажем, что *X* – точка пересечения биссектрисы $\angle ACB$ ΔABC и прямой, проходящей через точки – середины отрезка *BC* и дуги *BC*, когда точка *C* описывает дугу *k*.

Обозначим через *C* точку пересечения прямой *PX* с *k*. Строим Δ *ABC*. Таким образом, *X* – точка на биссектрисе угла $\angle ACB$ ($AP = BP$).

Докажем, что *X* находится и на прямой, проходящей через точки – середины отрезка *BC* и дуги *BC*, когда точка *C* описывает дугу *k*.

Рассмотрим ΔBXC с $\angle BCX = \frac{\gamma}{2}$ и с внешним $\angle BXP = \gamma$ ($X \in k_1$). Тогда $\angle CBX = \frac{\gamma}{2}$, т.е. ΔBCX – равнобедренный, и точка *X* принадлежит прямой, проходящей через точки – середины отрезка BC и дуги BC, когда точка C описывает дугу k.

Таким образом доказали, что если $X \in k_1$, то она является точкой пересечения биссектрисы угла $\angle ACB$ прямой, проходящей через точки – середины отрезка BC и сегмента BC, когда точка C описывает дугу k в ΔABC, и наоборот.

Задача 3. Дан сегмент AB и точка C, описывающая дугу k, с которой AB виден под углом γ. Найти ГМТ пересечения биссектрис ΔABC, когда точка C описывает дугу k.

Решение: Последовательно применяя инструменты: *«Биссектриса»*  и *«Пересечение двух объектов»* , строим биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle B$ в ΔABC и их точку пересечения M (рис. 4). Ставим в точку M *«Оставлять след»*, а в C – *«Перемещать»* , и когда точка C описывает дугу k, M описывает искомое ГМТ. Измеряем $\angle AMB$ при помощи инструмента *«Угол»* . Устанавливаем, что измерение угла $\angle AMB$

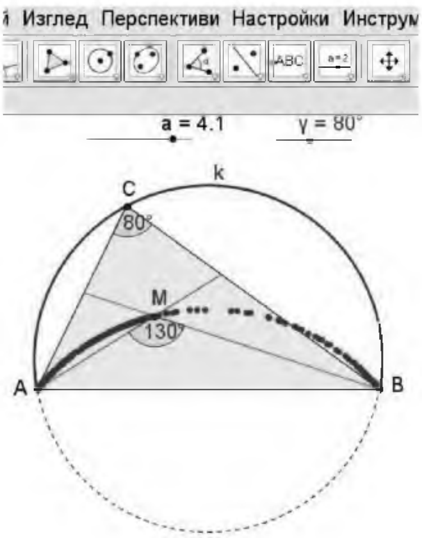


Рис. 4

не меняется, когда точка C описывает дугу k. Из нескольких конкретных значений γ устанавливаем, что между углами γ и $\angle AMB$ существует зависимость:

$\angle AMB = 90° + \frac{\gamma}{2}$, стороны угла проходят через постоянные точки A и B.

Гипотеза: ГМТ пересечения биссектрис ΔABC, когда точка C описывает дугу k, является дуга окружности, из точек которой AB виден под углом $90° + \frac{\gamma}{2}$ (рис. 5).

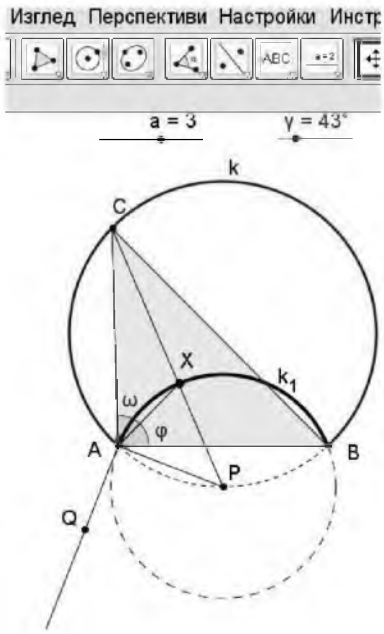


Рис. 5

Доказательство. Пусть M – точка пересечения биссектрис в ΔABC (см. рис. 4). Из условия задачи для точки M в ΔABC следует, что

$$\angle AMB = 180° - (\angle MAB + \angle MBA) =$$

$$= 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Таким образом, доказали, что когда точка C описывает дугу k, точка M описывает дугу окружности k_1, с которой отрезок AB виден под углом $90° + \frac{\gamma}{2}$.

Теперь построим ГМТ, из которых отрезок *AB* виден под углом $90° + \frac{\gamma}{2}$. *CP* – биссектриса, значит точка *P* – середина дуги *AB* и $\angle BAP = \frac{\gamma}{2}$. Строим луч $AQ \perp AP$. Тогда $\angle BAQ = \angle BAP + \angle PAQ = \frac{\gamma}{2} + 90°$. Точка *P* – точка пересечения перпендикуляра к *AQ*, выходящего из точки *A*, и перпендикуляра, опущенного из середины хорды *AB*. Искомым ГМТ, из которых отрезок *AB* виден под углом $90° + \frac{\gamma}{2}$, является дуга *k* окружности с центром *P* и радиусом *AP*.

Пусть теперь *X* – произвольная точка на k_1. Докажем, что она является точкой пересечения биссектрис ΔABC.

Строим точку пересечения *C* прямой *PX* с дугой *k* и ΔABC (см. рис. 5). В ΔABC луч *CX* является биссектрисой угла $\angle ACB$ (дуги *AP* и *BP* – равны). Докажем, что луч *AX* является биссектрисой угла $\angle BAC$. Введем обозначения: $\angle CAX = \omega$, $\angle XAB = \varphi$. В равнобедренном ΔAPX ($AP = PX$) с углами $\angle AXP = \omega + \frac{\gamma}{2}$ (внешний угол ΔAXC) и $\angle PAX = \frac{\gamma}{2} + \varphi$ имеем: $\omega = \varphi$, т.е. $\angle CAX = \angle XAB$. Тогда луч *AX* является биссектрисой угла $\angle BAC$.

Доказали, что если точка *M* принадлежит ГМТ, из которых отрезок *AB* виден под углом $90° + \frac{\gamma}{2}$, то она является точкой пересечения биссектрис ΔABC, и наоборот.

Задача 4. Дан отрезок *AB* и точка *C*, описывающая дугу *k*, из которой *AB* виден под углом γ. Найти ГМТ пересечения внутренней биссектрисы угла $\angle C$ и внешней биссектрисы угла $\angle B$ ΔABC, когда точка *C* описывает дугу *k*.

Решение. Строим точку пересечения *M'* внутренней и внешней биссектрисы соответственно углов $\angle C$ и $\angle B$ ΔABC. Ставим в точку *M'* *«Оставлять след»* и сдвигаем точку *C* по дуге *k*.

Полученный «след» (рис. 6), похож на «след» из задачи 1. Строим «след» точки *M* – пересечения внутренних биссектрис ΔABC (рис. 7).

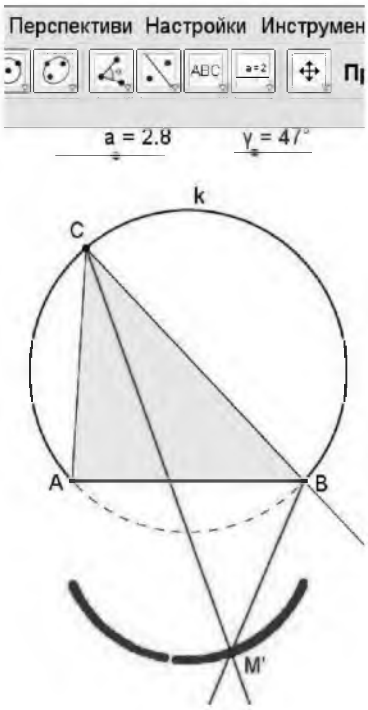
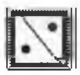


Рис. 6

При помощи инструмента *«Центральная симметрия»*  относительно точки *P* строим образы точек *A*, *B* и точки *M*, лежащей на k_1. Устанавливаем их принадлежность дуге k_1'. Видим симметричность двух «следов» относительно середины *P* дуги *AB*, которая не содержит *C*.

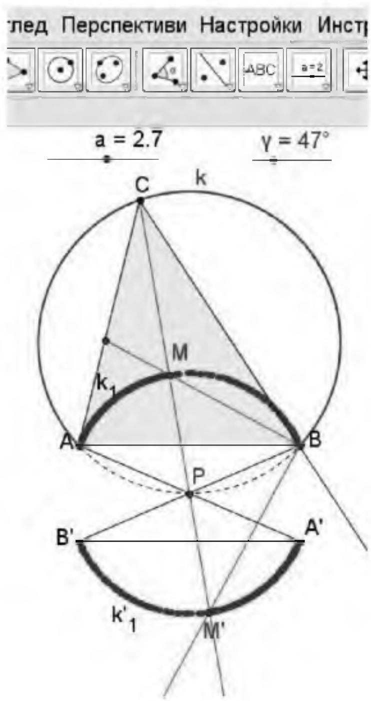


Рис. 7

Гипотеза: ГМТ, описывающим M' – точку пересечения внутренней и внешней биссектрис углов $\angle C$ и $\angle B$ в ΔABC, является дуга окружности, из которой образ отрезка AB при центральной симметрии с центром в середине P дуги AB виден под углом $90° + \frac{\gamma}{2}$.

Доказательство. Докажем, что точки M и M' – симметричны относительно середины P дуги AB.

Стороны BP и MP в ΔBPM равны (см. рис. 7), так как $\angle PBM = \angle BMP = \frac{\beta + \gamma}{2}$. Стороны BP и $M'P$ в $\Delta BPM'$ тоже равны, так как $\angle PBM' = \angle BM'P$ ($BM \perp BM'$ как биссектрисы смежных углов). Из равенства $MP = M'P$ следует, что точки M и M' симметричны относительно середины P дуги AB. Так как центральная симметрия является движением плоскости, то отсюда следует, что M' описывает дугу, из которой образ $A'B'$ отрезка AB при центральной симметрии с центром в середине P дуги AB виден под углом $90° + \frac{\gamma}{2}$.

Строим дугу k_1' как образ дуги k_1 при центральной симметрии с центром P (рис. 8).

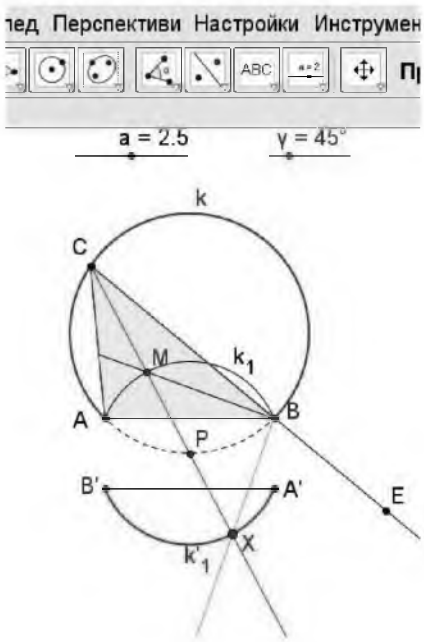


Рис. 8

Докажем, что произвольная точка $X \in k_1'$ является точкой пересечения внутренней биссектрисы $\angle C$ и внешней биссектрисы $\angle B$ в ΔABC.

Обозначим через C точку пересечения прямой PX и дуги k и построим ΔABC. Луч CX является биссектрисой $\angle ACB$ в силу равенства дуг ($AP = PB$).

Докажем, что луч BX является биссектрисой внешнего угла $\angle B$ в ΔABC.

Обозначим через M точку пересечения PX и k_1. Из условий задачи: луч $\overrightarrow{BM}$ – биссектриса угла $\angle ABC$ ($M \in k_1$) и $\angle MBX = 90°$ (MX – диаметр окружности), следует, что $\angle ABX = \angle XBE$, т.е. луч BX является биссектрисой внешнего угла $\angle B$ в ΔABC.

Итак, доказали, что произвольная точка $X \in k_1'$ является точкой пересечения внутренней биссектрисы $\angle C$ и внешней биссектрисы $\angle B$ в ΔABC.

Задача 5. Дан отрезок AB и точка C, описывающая дугу k, из которой AB виден под углом γ. Найти ГМТ, состоящее из ортоцентров ΔABC, когда C описывает дугу k.

Решение. При помощи инструмента «*Перпендикуляр через точку*»  строим ортоцентр M ΔABC. Ставим в точку M «*Оставлять след*» и сдвигаем точку C по дуге k при помощи инструмента «*Перемещать*»  (рис. 9).

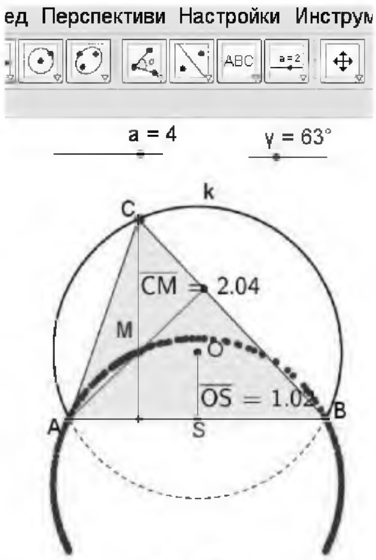


Рис. 9

Находим длину отрезка CM при помощи инструмента «*Расстояние и длина*»  и устанавливаем, что она не меняется (!), когда точка C описывает дугу k. Поскольку отрезок CM имеет постоянную длину и постоянное направление ($CM \perp AB$), то искомое ГМТ является образом дуги k при параллельном переносе вдоль вектора $\overrightarrow{CM}$, и, значит, образ – дуга, равная дуге k. При движении точки C по дуге k не изменяется расстояние OS от центра O дуги k до сегмента AB. Сравним длину отрезка CM с длиной постоянного отрезка OS, который связан с отрезком AB и с дугой k. Для длины отрезка OS устанавливаем зависимость $CM = 2OS$.

Гипотеза: ГМТ, составленное из ортоцентров ΔABC, когда C описывает дугу k, является образом k при параллельном переносе вдоль вектора $\vec{t} = 2\overrightarrow{OS}$, где O – центр дуги, а S – середина отрезка AB.

Доказательство. Докажем зависимость $CM = 2OS$.

Рассмотрим ΔOQS и ΔMBC (рис. 10), стороны которых являются соответственно частями оси симметрии и высот в ΔABC. Треугольники подобные, поскольку имеют углы с соответствующими параллельными сторонами. Коэффициент подобия $\frac{SQ}{BC} = \frac{1}{2}$, поскольку S – середина AB, а Q – середина AC. Для пары соответствующих сторон треугольников OS и CM выполняется равенство $CM = 2OS$.

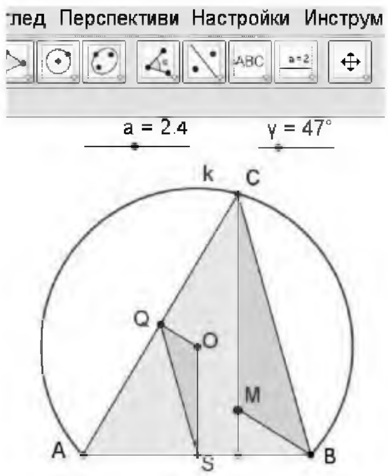


Рис. 10

Теперь построим образ дуги k при параллельном переносе вдоль вектора

$\vec{t}=2\overline{OS}$. Для этого используем инструмент «*Параллельный перенос вдоль вектора*» , сначала построив вектор $\overrightarrow{OT}=2\overrightarrow{OS}$ (рис. 11).

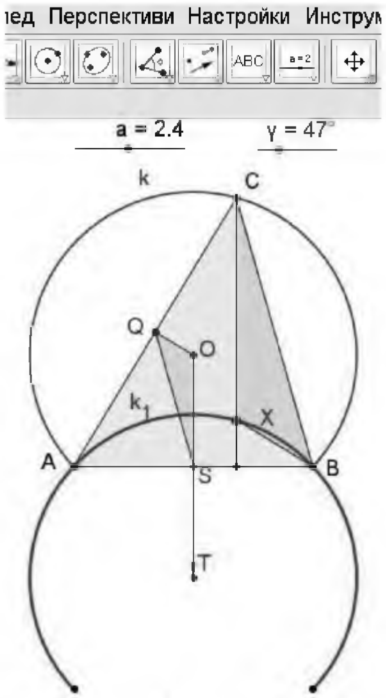


Рис. 11

Остается доказать, что произвольная точка X дуги k_1 является ортоцентром вписанного в k треугольника.

Строим перпендикуляр к AB, проходящий через X. Пусть C – точка пересечения дуги k и перпендикуляра. Таким образом, X лежит на высоте ΔABC, выходящей из вершины C.

Докажем, что прямая BX перпендикулярна AC. Рассматриваем ΔOQS и ΔXBC, которые подобны, так как $\frac{OS}{CX}=\frac{SQ}{BC}=\frac{1}{2}$ и $\angle OSQ$ = $\angle XCB$ (углы с соответствующими параллельными сторонами). Из условий OQ параллельна BX и $OQ \perp AC$, значит $BX \perp AC$.

Таким образом, доказали, что любая точка X дуги k_1 является ортоцентром вписанного в k треугольника.

Задача 6. Дан сегмент AB и точка C, описывающая дугу k, из которой AB виден под углом γ. Найти ГМТ, содержащее медицентр (точку пересечения медиан) треугольника ΔABC, когда C описывает дугу k.

Решение. Последовательно применяя инструменты «*Середина*» , «*Отрезок по двум точкам*»  и «*Пересечение двух объектов*» , строим медицентр M треугольника ΔABC. Ставим в точку M «*Оставлять след*». Устанавливаем, что когда C описывает дугу k, точка M также описывает дугу окружности и отношение $\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3}$ сохраняется (рис. 12).

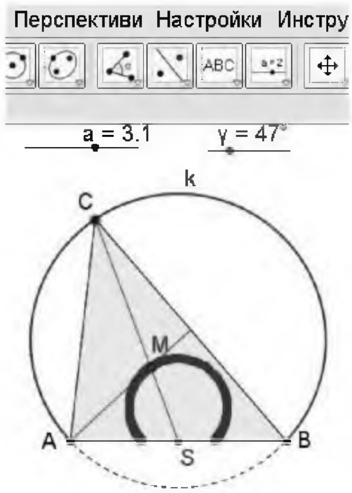


Рис. 12

Гипотеза: ГМТ, которое описывает медицентр M ΔABC, когда точка C описывает дугу k, – это образ k при гомотетии с центром S – серединой отрезка AB и коэффициентом $k=\frac{1}{3}$.

Доказательство. Образ дуги окружности при гомотетии – дуга окружности. Точки C, M и S лежат на одной прямой и отношение $\frac{MS}{CS}=\frac{1}{3}$ (см. рис. 12).

При помощи инструмента *«Гомотетия»*  строим образ k_1 дуги k при гомотетии с центром S – серединой отрезка AB и коэффициентом $k=\frac{1}{3}$ (рис. 13).

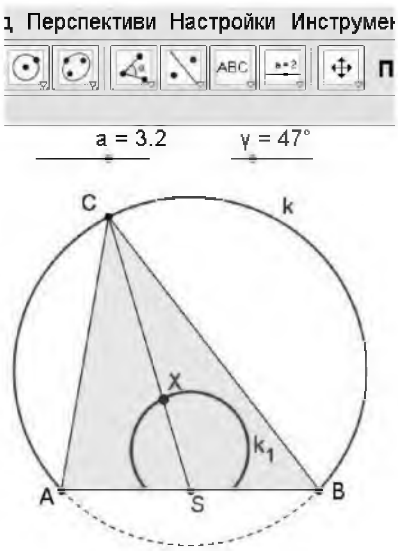


Рис. 13

Пусть $X \in k_1$. Докажем, что X – медицентр треугольника ΔABC.

Строим точку C пересечения прямой XC с дугой k и строим ΔABC. Таким образом, точка X принадлежит медиане CS треугольника ΔABC. Так как коэффициент гомотетии равен $\frac{1}{3}$, то $\frac{SX}{SC}=\frac{1}{3}$, т.е. X – медицентр треугольника ΔABC.

Один из принципов подбора предложенной системы задач заключался в том, чтобы было очевидным преимущество использования компьютера для их решения. С другой стороны, эта подборка задач хорошо укладывается в систему организации самостоятельного (в том числе дистанционного) обучения математике. Систематизация задач, решение которых в интерактивных средах может быть осуществлено более эффективно, чем при традиционном подходе, позволит сделать компьютер реальным помощником в обучении математике.

Библиография

1. *Русаков А.А., Гроздев С.И., Лалева В.* Использование дидактических возможностей ИКТ в процессе поиска геометрических мест точек в интерактивной среде // Педагогическая информатика. 2013. № 4. С. 12–24.
2. *Русаков А.А., Русакова В.Н.* Научно-методические аспекты формирования геометрических представлений школьников в условиях информатизации образования // Пути решения проблем совершенствования математического образования: интеграция науки и практики: материалы Международной науч.-практ. конф. Тирасполь, 2012. С. 195–199.
3. *Русаков А.А., Русакова В.Н.* Цилиндры, ИКТ и пространственное мышление учащихся // Математика. Все для учителя! 2012. № 9 (21). С. 30–33.
4. *Русаков А.А., Ситкин Е.Л.* Использование дидактических возможностей информационных и коммуникационных технологий в процессе подготовки к единому государственному экзамену на основе упрощенных аналитических приемов. URL: http://www.iiorao.ru/iio/pages/izdat/ison/publication/ison_2012/num_9_2012/Rusakov_Sitkin.pdf.
5. *Паскалева З., Паскалев Г.* Математика. 8 клас. София, 2001. С. 253–261. (bul)
6. *Lungu, K.* and *A. Rusakov*, 2012. Understanding as a pedagogical category (for example, mathematics). In: Science, Technology and Higher Education: materials of the international research and practice conference (vol. 2, pp. 96–100). Westwood, Canada, 2012.
7. *Rusakov, A.*, 2014. On the self-learning activities of university students. In: Proceeding of the 43 Spring conference of the Union Bulgarian mathematicians (pp. 211–217). Borovetz.
8. *Александров И.И.* Сборник геометрических задач на построение. М.: Учпедгиз, 1954.
9. Сборник по математика. 8 клас / П. Рангелова [и др.]. Пловдив: Летера, 2000. (bul)

10. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. М.: Наука, 1982.

Bibliography

1. *Rusakov, A.A., S.I. Grozdev* and *V. Laleva,* 2013. Use of didactic possibilities of information technologies in search of geometrical places of points in interactive environment. Pedagogical Computer Science, 4: 12–24. (rus)
2. *Rusakov, A.A.* and *V.N. Rusakova,* 2012. Scientific aspects of developing geometrical ideas of schoolchildren in conditions of informatization of education. Ways of solving problems of improving mathematical education: integration of science and practice: Proceedings of International Scientific Conference. Tiraspol: 195–199. (rus)
3. *Rusakov, A.A.* and *V.N. Rusakova,* 2012. Cylinders, information technologies and spatial thinking of pupils. Mathematics. Everything for the teacher!, 9 (21): 30–33. (rus)
4. *Rusakov, A.A.* and *E.L. Sitkin*, 2012. The use of didactic possibilities of information and communication technologies in preparation for uniform graduation examination on the basis of simplified analytical receptions. URL: http://www.iiorao.ru/iio/pages/izdat/ison/publication/ison_2012/num_9_2012 /Rusakov_Sitkin.pdf. (rus)
5. *Paskaleva, Z.* and *G. Paskalev*, 2001. Mathematics. 8th grade. Sofia: 253–261. (bul)
6. *Lungu, K.* and *A. Rusakov*, 2012. Understanding as a pedagogical category (for example, mathematics). In: Science, Technology and Higher Education: materials of the international research and practice conference (vol. 2, pp. 96–100). Westwood, Canada, 2012.
7. *Rusakov, A.,* 2014. On the self-learning activities of university students. In: Proceeding of the 43 Spring conference of the Union Bulgarian mathematicians (pp. 211–217). Borovetz.
8. *Alexandrov, I.I.,* 1954. Collection of geometrical tasks on construction. Moscow: published by Uchpedgiz. (rus)
9. *Rangelova, P. et al.*, 2000. Collected tasks in mathematics. 8th grade. Plovdiv: published by Letera. (bul)
10. *Sharygin, I.F.,* 1982. Geometry tasks. Moscow: published by Nauka. (rus)