УДК 378.147:51

Львова В.Д.

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, методика, химико-технологическая специальность, профессиональная направленность.

Как известно, обучение математике в техническом вузе имеет ряд особенностей, обусловленных потребностями инженерных специальностей в определенных математических компетентностях будущих специалистов. Математическая подготовка будущих инженеров, по нашему мнению, в современных условиях призвана решить следующие задачи:

– помочь будущим инженерам овладеть багажом фундаментальных математических знаний, достаточным для применения в процессе обучения и в будущей профессии;
– обучить использованию главного математического метода познания – метода математического моделирования реальных процессов и явлений, а также математическим аппаратам, применяемым в данной специальности;
– развить качества личности, необходимые для эффективного прикладного использования математических знаний и полученных умений.

Перечисленные задачи, на наш взгляд, способно решить профессионально направленное обучение. Профессиональную направленность обучения математике мы понимаем как основополагающий дидактический принцип, заключающийся в целенаправленной корректировке программы и содержания образования, использовании определенным образом подобранных педагогических приемов и методов, имеющих целью усилить профессиональную направленность личности студента и сформировать математическую готовность будущего специалиста к профессиональной деятельности. При этом необходимыми условиями реализации профессиональной направленности в обучении мы считаем научность, методологическую направленность, усиление фундаментализации математического образования, согласование содержания и методик обучения с психологией восприятия обучаемых, использование межпредметных связей, активность обучения.

Реализацию профессиональной направленности в обучении естественно начинать с корректировки программы и отбора содержания курса. При этом мы руководствуемся следующими критериями:

– содержание должно соответствовать Государственному образовательному стандарту для данной специальности;
– логическая схема построения математической теории должна соответствовать логике науки, но для целей обучения ее нужно адаптировать, выстроив наиболее удачную схему построения материала с учетом психологических особенностей восприятия студентов;
– содержание материала необходимо проанализировать с точки зрения его практической значимости. При этом сделать акцент на математическом аппарате данной специальности, на разделах и темах, имеющих наибольшую ценность для данной профессии, на возможности использования метода математического моделирования, на материале, подходящем для использования его с целью усиления профессиональной направленности, например текстовых задачах профессионального содержания;
– объем материала и количество часов на его изучение должны быть согласованы с его практической значимостью.

Процесс отбора содержания курса «Дифференциальные уравнения» для химико-технологической специальности мы начали с изучения требований Государственного образовательного стандарта и анализа использования дифференциальных уравнений в других специальных и общетехнических курсах. В Государственном образовательном стандарте по химико-технологическим специальностям назван только раздел «Дифференциальные уравнения», расшифровка по темам не приведена. Практика показывает, что обычно на данных специальностях изучают общие понятия об обыкновенных дифференциальных уравнениях, уравнения первого порядка (с разделяющимися переменными, линейные, однородные, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах), уравнения второго порядка (решаемые методом понижения порядка, линейные однородные и линейные неоднородные со специальной правой частью, решаемые методом подбора, а также решаемые методом вариации произвольной постоянной), приводятся примеры решения прикладных общетехнических задач, из приближенных методов используется только метод интегрирования дифференциального уравнения путем разложения в степенной ряд в разделе «Ряды». Мы проанализировали общетехнические и специальные предметы, изучаемые на химико-технологической специальности, с точки зрения использования в них дифференциальных уравнений. Рассматривали следующие дисциплины: физика, физическая химия, теоретическая механика, сопротивление материалов, электротехника, процессы и аппараты химической технологии, общая химическая технология, системы управления химико-технологическими процессами, техническая термодинамика и теплотехника, спецкурс «Математическое моделирование основных процессов химических производств», и сделали следующие выводы.

Обыкновенные дифференциальные уравнения в химической технологии обычно используют как математический аппарат для описания нестационарных режимов объектов с сосредоточенными параметрами (независимой переменной является время), а также стационарных режимов объектов с распределенными параметрами по одной пространственной координате (переменная – пространственная координата) [2]. В химической технологии исследование объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, иногда представляет собой весьма трудную вычислительную задачу, и часто вместо математической обрисовки объекта дифференциальными уравнениями используют его описание системой конечно-разностных уравнений, для чего непрерывный объект с распределенными параметрами рассматривают как дискретный с сосредоточенными параметрами, но имеющий ячеечную структуру.

Математическая модель нестационарных объектов представляет совокупность дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), отражающих изменение переменных процесса во времени.

Сложность решения возрастает с ростом порядка уравнения или с ростом числа дифференциальных уравнений в системе, что практически эквивалентно, так как уравнение m-го порядка можно преобразовать в систему, состоящую из m уравнений первого порядка. Кроме того, на сложность решения влияет линейность и нелинейность уравнений. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения решаются просто (аналитически или с использованием операционного исчисления). Системы линейных дифференциальных уравнений, нелинейные дифференциальные уравнения решаются на компьютерах с использованием численных методов. Решая системы дифференциальных уравнений, приходится сталкиваться со свойством «жесткости» системы, заключающейся в значительном разбросе собственных значений матрицы системы, что не позволяет использовать обычные методы решения. В таких случаях необходимо применять специально разработанные алгоритмы. При составлении математической модели всегда задают начальные условия, т.е. всегда имеют дело с решением задачи Коши. Также в химической технологии широко используются и дифференциальные уравнения в частных производных (для описания динамики объектов с распределенными параметрами или стационарных режимов объектов с параметрами, распределенными по нескольким координатам).

В результате проведенного анализа можно выделить наиболее используемые типы обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых аналитически: дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения первого и высших порядков, системы линейных дифференциальных уравнений. Обычно линейные дифференциальные уравнения решают, используя приближенные методы, в том числе и графические, операционное исчисление. Кроме того, в ряде перечисленных общетехнических дисциплин используются дифференциальные уравнения для решения разного рода физических, механических, электромеханических задач.

Основным результатом обучения решению дифференциальных уравнений в нашем курсе мы считаем умения студентов различать и решать аналитически основные типы дифференциальных уравнений и простейшие системы, использовать дифференциальные уравнения в качестве математических моделей прикладных задач, осознавать существование не только аналитических способов решения. С учетом реализации профессиональной направленности в содержание курса включаем: метод математического моделирования, качественное решение дифференциальных уравнений методом построения изоклин, нормальные системы дифференциальных уравнений методом исключения и линейные однородные системы дифференциальных уравнений (в простейшем случае, когда корни характеристического уравнения – действительные), понятие о численном решении уравнений (метод Эйлера, метод Рунге–Кутта). Конечно, основная наша задача – научить решать дифференциальные уравнения аналитически, но понятие о качественном методе (через построение изоклин), приближенных и численных методах способствует преемственности между нашим курсом и использованием дифференциальных уравнений в других специальных дисциплинах. В заключение изучения раздела рассматриваются (в небольшом объеме) уравнения в частных производных, а именно общие понятия и уравнение теплопроводности.

Воспринять дифференциальные уравнения как математический аппарат для решения прикладных задач позволяет введение метода математического моделирования.

Со связи нового раздела с ранее изученным дифференциальным исчислением, с постановки проблемы начинаем первую лекцию: «Пользуясь дифференциальным исчислением, мы уже умеем исследовать свойства данной функции с помощью производных – определять промежутки ее возрастания и убывания, скорость роста, точки экстремумов, направление и кривизну ее графика… Существует обратная, не менее важная задача – нахождение неизвестной функции по заданным ее свойствам, выраженным через производные или дифференциалы. В простейших случаях эта задача решается непосредственным интегрированием, в других – требуется более сложный математический аппарат. В алгебре для нахождения неизвестных величин используют уравнения. Аналогично и в математическом анализе для нахождения неизвестной функции по данным ее свойствам составляют уравнение, связывающее неизвестную функцию и величины, задающие ее свойства. А поскольку величины, задающие свойства функции, выражаются через производные или дифференциалы, то полученное соотношение и называют дифференциальным уравнением».

Далее идет рассказ о цели использования дифференциальных уравнений, о методе математического моделирования в прикладных технических задачах, об этапах решения прикладных задач, примеры задач на составление дифференциальных уравнений (эта часть лекции построена с элементами проблемного обучения). Здесь возникает педагогическая проблема: как показать пример решения задачи, если методам решений студенты еще не обучены? Мы пользуемся следующим приемом. Составляем дифференциальное уравнение, затем предлагаем проверить подстановкой, что указанная совокупность функций, выраженная формулой, содержащей произвольную постоянную, является решением данного уравнения.

Затем даются основные понятия (дифференциальное уравнение, обыкновенные дифференциальные уравнения, порядок уравнения, решение или общий интеграл). На той же лекции говорим об уравнениях первого порядка, разрешенных относительно производной или заданных в неявном виде, об общем, частном и особом решениях, формулируем без доказательства теорему существования и единственности решения задачи Коши, даем понятие изоклин, поля направлений и особых точек, приводим пример качественного решения (изображения интегральных кривых методом построения изоклин и поля направлений). В последующих лекциях, посвященных типам дифференциальных уравнений первого порядка, также приводим задачи, приводящие к уравнениям определенного типа. Задачи по умозрительной модели [1] подразделяем на типы в зависимости от прикладного смысла производной или используемого закона: геометрические (производная – угловой коэффициент касательной), технические (производная – скорость или ускорение, а процесс – физический, химический, электротехнический, из сопротивления материалов и т.д.), другие прикладные (экономика, биология, реклама и др., производная часто также скорость). Отдельно оговариваем задачи на составление уравнений в дифференциалах. Решаем задачи методом проблемного обучения, используя следующие этапы:

1) составление математической модели;
2) непосредственно решение уравнения;
3) анализ результата.

Начинаем решение с анализа условия, нахождения типа задачи, определения переменной, функции, начальных условий, остальных данных, выражения производной либо дифференциалов, написания соответствующего закона. Составленное уравнение анализируем, определяем его тип, затем переходим к этапу решения. Анализируя результат, схематично изображаем график найденной функции либо оговариваем, как будет себя вести данная функция, например, при $t \to \infty$ или $t \to 0$, определяем по виду функции, какой процесс происходит, сопоставляем это с исходными данными.

Используем профессионально направленные задачи о концентрации раствора, об охлаждении тела, о переходе вещества в раствор, задачи на химические реакции первого и второго порядка, о разложении вещества, о теплообмене через трубу, об очищении газа, об ионизации газа, а также физические, электротехнические, геометрические задачи, задачи термодинамики и др. Причем наши задачи не являются задачами из спецдисциплин, по тематике они приближены к профессиональным и содержат явно выраженную математическую основу, приводя к простейшим математическим моделям – дифференциальным уравнениям, решаемым аналитически [4; 5]. Приведем несколько примеров.

Задача 1 (на уравнение с разделяющимися переменными)

Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 час после начала реакции осталось 44,8 г вещества A, а после 3 часов – 11,2 г этого вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется половина этого вещества.

Задача 2 (на линейное уравнение первого порядка)

В любой момент времени скорость движения точки превышает среднюю скорость за время с начала движения до этого момента на 2 м/с. Определить закон движения, т.е. зависимость пути от времени, зная, что за первую секунду движения точка прошла 2 м.

Задача 3 (на составление системы дифференциальных уравнений первого порядка)

Вещество *A* разлагается на два вещества *P* и *Q*. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложившегося вещества *A*. Найти законы изменения количеств *x* и *y* веществ *P* и *Q* в зависимости от времени *t*, если через час после начала процесса разложения *x* и *y* равны соответственно $\frac{a}{8}$ и $\frac{3a}{8}$, где *a* – первоначальное количество вещества *A*.

Задача 4 (на составление дифференциального уравнения второго порядка)

Пусть имеется толстая цилиндрическая труба с внутренним радиусом *r* и наружным *R*. Требуется определить теплопередачу через трубу изнутри наружу, предполагая, что установился стационарный тепловой режим, при котором количество тепла, проходящее через какую-либо данную площадь, постоянно, т.е. температура *T* каждой точки трубы не зависит от времени и меняется только с расстоянием точек от оси трубы.

Приведем методику решения задач на лекции на примере геометрической задачи из темы «Уравнения с разделяющимися переменными». Задача предлагается после разбора соответствующего типа уравнений.

Задача 5

Найти уравнение кривой, проходящей через точку *P*(1; 2), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью *Ox* делится пополам в точке пересечения с осью *Oy*.

Задача решается при активной работе студентов. Ребята обсуждают ход решения задачи, предлагают варианты дальнейших действий, подсказывают товарищу, пожелавшему решать задачу у доски.

I. Математическая модель.

Преподаватель предлагает сделать чертеж (рис. 1).

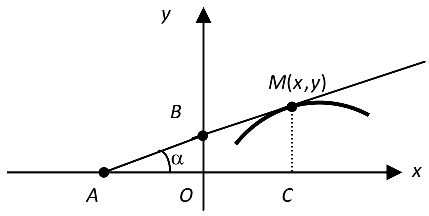

Рис. 1

Преподаватель: Обозначьте на чертеже все, что необходимо.

Студент: Введем обозначения. Пусть *M*(*x*, *y*) – произвольная точка искомой кривой, *AM* – касательная к кривой, *A* – точка пересечения касательной с осью *Ox*, *C* – проекция точки *M* на ось *Ox*, α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси *Ox*.

Вопрос преподавателя: Какие элементы чертежа равны по условию?

Ответ студента: *AB* = *BM*.

Вопрос: Содержит ли данная формулировка задачи начальное условие?

Ответ: В точке *P*(1; 2) имеет место условие *y*(1) = 2 (начальное условие).

Вопрос: Что представляет собой производная в данном случае?

Ответ: Производная *y* по *x* есть угловой коэффициент касательной в точке *M*(*x*, *y*), т.е. $\frac{dy}{dx} = tg\alpha$.

Вопрос: А что представляет собой угловой коэффициент касательной в точке *M*(*x*, *y*) из чертежа?

Ответ: Из чертежа видно, что $tg\alpha = \frac{MC}{AC}$.

Очевидно, *MC* = *y*. Так как *AB* = *BM* и *MC* || *BO*, то по теореме Фалеса *AO* = *OC*. Но *OC* = *x*. Значит, *AO* = *x*.

Поэтому *AC* = *AO* + *OC* = 2*x*.

Преподаватель: Напишем связь между x, y и y'. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$ – дифференциальное уравнение. Каков тип этого уравнения? Решите его.

II. Решение.

Студент: Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получаем $\frac{2dy}{y}=\frac{dx}{x}$.

Проинтегрировав, будем иметь $2\ln|y|=\ln|x|+\ln|c|$, где c – произвольная постоянная. Отсюда $|y|^2=|cx|$.

С учетом того, что c – произвольная постоянная, получим: $y^2 = cx$ – общее решение дифференциального уравнения.

Преподаватель: Как по начальному условию найти частное решение?

Студент: По начальному условию $y(1) = 2$ найдем значение c, для чего в равенство $y^2 = cx$ подставим $x = 1$, $y = 2$. Тогда $2^2 = c \cdot 1$, т.е. $c = 4$. Значит, искомым частным решением полученного дифференциального уравнения является $y^2 = 4x$.

III. Анализ результата.

Преподаватель: Что является графиком данной функции? Изобразите его. Проверьте, выполняется ли условие задачи для этой функции.

Студент: Графиком полученного частного решения дифференциального уравнения (интегральной кривой уравнения) является парабола (рис. 2). Мы видим на графике, что если провести касательную, например, через точку P на графике, то отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

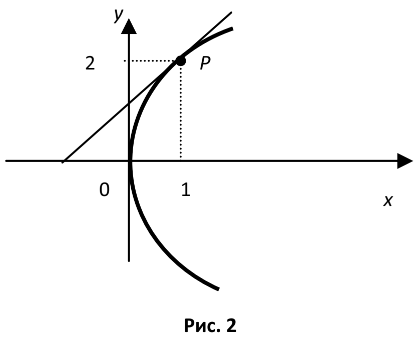

Рис. 2

В лекционный материал по дифференциальным уравнениям высших порядков также включаем примеры решения профессионально-прикладных задач, приводящих к неполным дифференциальным уравнениям второго порядка либо к линейным однородным второго порядка. При чтении систем дифференциальных уравнений приводим задачу о разложении вещества (задача на систему дифференциальных уравнений первого порядка решается методом исключения). Более широкий спектр задач представлен на практических занятиях и в процессе самостоятельной работы над индивидуальными домашними заданиями.

Решение дифференциального уравнения методом построения изоклин входит в индивидуальное домашнее задание № 1 по дифференциальным уравнениям первого порядка. В индивидуальное задание № 2 по решению уравнений высших порядков и их систем входит самостоятельно подготовленный конспект по численным методам Эйлера и Рунге–Кутта. Отчеты за каждое индивидуальное задание проходят на консультациях и представляют собой индивидуальную беседу с преподавателем, включающую проверку работ, а также теоретических и практических знаний. Баллы за отчет вместе с оценкой по контрольной работе образуют балл за контрольную точку (первую по уравнениям первого порядка или вторую по уравнениям высших порядков и системам). Учитывая ограниченность по времени, на весь раздел мы отводим 14 часов лекций и 16 часов практических занятий.

Как показывает практика, изложение материала по представленной методике формирует восприятие дифференциальных уравнений как средства для решения профессиональных задач в дальнейшем, позволяет повысить качество обучения, сформировать у студентов умения применять математические знания.

Литература

1. *Блехман, И.И.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. Киев: Наукова думка, 1976.
2. *Кафаров, В.В.* Математическое моделирование основных процессов химических производств / В.В. Кафаров, М.Б. Глебов. М.: Высшая школа, 1991.
3. *Кудрявцев, Л.Д.* Современная математика и ее преподавание / Л.Д. Кудрявцев. М.: Наука, 1985.
4. *Львова, В.Д.* Подбор задач при обучении дифференциальным уравнениям на химико-технологической специальности втуза / В.Д. Львов // Сб. трудов II международной науч. конф. «Математика. Образование. Культура». Тольятти, 2005. С. 175–177.
5. *Львова, В.Д.* Прикладная направленность при обучении дифференциальным уравнениям студентов химико-технологической специальности втуза / Львова В.Д. // Сб. трудов II региональной науч.-практ. конф. «Реализация принципа непрерывности в системе учебных дисциплин в образовательных учреждениях». Астрахань, 2009. С. 53–61.