

УДК 371.64/.69:51

Ерусалимский Я.М.

СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК МАТЕМАТИКИ КАК ЭЛЕМЕНТ КУЛЬТУРЫ

Ключевые слова: современный учебник, культура, математическая культура.

В предыдущей нашей работе [2] были сформулированы и обоснованы требования, которым должен удовлетворять учебник математики, чтобы называться современным. Перечислим еще раз эти требования:

1. Соответствие действующим Федеральным государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования (ФГОС ВПО).
2. Современный стиль изложения.
3. Интерактивность.
4. Гипертекстовость.
5. Современный дизайн.
6. Компьютеризованность и алгоритмичность.
7. Модульность.
8. Технологичность.
9. Открытость – замкнутость.
10. Методическая новизна.

Настоящая работа посвящена трудному формализуемому, не часто выполняемому, но крайне важному требованию: *современный учебник математики должен быть элементом (явлением) культуры.*

Что следует понимать под этим? Математика – одна из редких наук, которая трудно классифицируется. Она не является естественно-научной, она же не является гуманитарной, и в силу этого в системе наук вместе с философией она занимает особое место. Математические объекты (точки, прямые, плоскости, числа и т.д.) имеют особую природу – они существуют только в нашем сознании, но не зависят от него, т.е. носят достаточно объективный характер. Вся математика имеет стройную логическую структуру, в ее основе лежит аксиоматический подход, все здание математики строится на базе аксиом и первичных понятий с помощью логических умозаключений. Все это позволяет говорить об особом способе мышления – математическом.

Характерными чертами такого мышления являются высокий уровень абстракций и логическая стройность. В этом и состоит глубокое отличие математики от большинства наук и ее близость к искусству и культуре. Действительно, музыка в своей основе имеет очень малое – конечный набор нот, конечный набор инструментов, и оперируя этим малым, композиторы создают музыку. Здание музыки огромно, постоянно строится и никогда не будет построено. Доказанная К. Геделем теорема о неполноте аксиоматических (математических) теорий утверждает то же самое о математике, вернее о том, что здание математики постоянно строится, и не только в высоту. Оно требует постоянного расширения того фундамента, на котором покоится. Доказано, что внутри математики могут сосуществовать две разные геометрии – Евклида и Н. Лобачевского, две теории множеств, в одной из которых существуют множества мощности промежуточной между счетной и континуумом, а в другой нет. Также обстоит дело и с живописью, где существуют взаимоисключающие направления (реализм и абстракционизм). Если говорить о других видах искусств: балете, драматическом искусстве, литературе и пр., то можно провести их сравнение с математикой и также обнаружить много общих черт. Все это позволяет говорить о том, что математика есть та область творческой человеческой деятельности, которая является пограничной для двух основных сфер такой деятельности – науки и культуры.

Образность математики такова, что для многих людей она несет в себе эстетическое начало. Самым ярким подтверждением сказанного является знаменитый «Черный квадрат» К. Малевича. О тесном родстве математики

с искусством свидетельствуют и художественные выставки «Компьютерный дизайн геометрических поверхностей» и «Изумительные фракталы», развернутые в холлах мадридского дворца конгрессов во время Всемирного конгресса математиков (2006 г.).

Существует много работ, посвященных проблеме «Математика и культура», среди них в первую очередь следует выделить книгу выдающегося математика современности Ю.И. Манина «Математика как метафора» [6]. Большая часть этой книги посвящена месту и роли математики в мировом культурном процессе. Процитируем Ю.И. Манина: «Чистая математика – это огромный организм, построенный полностью и исключительно из идей, возникающих в умах математиков и в этих умах живущих... Математика – это просто то, чем занимаются математики, также как музыка – это то, чем занимаются музыканты». Таким образом, математика – это специфическая область умственной деятельности человека. Занятия математикой развивают умственные способности индивида и всего человечества в целом. Умственная математическая деятельность присуща каждому, однако на разном уровне, начиная от повседневного, бытового (простейший счет, решение математических головоломок и т.п.), прикладного профессионального (экономика, военное дело, инженерное дело, науки и т.п.) и до чисто профессионального (занятия самой математикой). Уровни владения математикой такие же, как и уровни владения музыкой: бытовое (напевание, пассивное слушание), целенаправленное слушание (посещение концертов, прослушивание записей), профессиональное.

Особая роль математики в системе культурных ценностей человечества зафиксирована системой среднего обра-

зования. Математика – единственный предмет, который изучается непрерывно с первого и до выпускного класса во всех средних школах Земли. Вот что говорит Платон (429–348 гг. до н.э.) в своем труде «Государство» о роли арифметики: «Эта наука... подходит для того, чтобы установить закон и убедить всех, кто собирается занять высшие должности в государстве, обратиться к искусству счета, причем заниматься им они должны будут не как попало, а до тех пор, пока не придут с помощью самого мышления к созерцанию природы чисел – не ради купли-продажи, о чем заботятся купцы и торговцы, но для военных целей и чтобы облегчить самой душе ее обращение от становления к истинному бытию».

В культуре мышления выделяют его особую ветвь – культуру математического мышления, а основной задачей курса школьной математики является формирование этой культуры. Культура математического мышления – это способность оперировать умственными образами, строить цепочки логических рассуждений. Вот что говорит о значении культуры математического мышления экономист П. Самуэльсон (цит. по [6]): «Одно из преимуществ такого посредника, как математика (точнее говоря, математических канонов изложения доказательств, будь то словесно или с использованием символики), состоит в том, что нам приходится выложить карты на стол, так что наши исходные предпосылки будут видны всем». Тесная связь математики с философией очевидна. Такие математические понятия, как «истина», «бесконечность», являются одновременно и философскими категориями. Заметим, что с обеими математика «справилась» успешнее, чем философия.

Еще один интересный вопрос – откуда берутся математики? Способности

к математическому мышлению распределены неравномерно (впрочем, как и всякие способности). Они проявляются в достаточно раннем возрасте и могут быть развиты правильным образованием, а могут быть и утрачены при его отсутствии или низком качестве. Путь к математической деятельности может быть прямым, а может быть сложным и тернистым. Занятия математикой не связаны напрямую с финансовым благополучием, скорее напротив. Однако притягательная сила такого рода деятельности для умов, склонных к ней, настолько велика, что можно говорить об «очаровании» математикой. Приведем некоторые примеры. Шотландский математик Колин Маклорен (ряд Маклорена–Тейлора) в двенадцатилетнем возрасте поступил в университет г. Глазго, а в двадцатилетнем возрасте получил кафедру в университете г. Абердин. Томас Симпсон (формула Симпсона) был сначала ткачом, затем школьным учителем, а затем профессором математики. Известный всему миру Ф. Виетт (знакомая всем школьникам теорема Виетта) по образованию юрист, интересовался астрономией и по необходимости занялся тригонометрией и алгеброй. А. Келли (теорема Келли о числе помеченных деревьев) окончил Тринити-Колледж (Кембридж) в 17 лет. Основным источником существования для него в течение двадцати лет являлась юридическая практика, однако все свободное время он посвящал математике, опубликовал свыше 300 математических работ. В сорокадвухлетнем возрасте, несмотря на материальную потерю, оставил адвокатуру и занял пост профессора математики в Кембридже. Пьер Ферма (1601–1665) (знаменитая теорема Ферма) – юрист, работал советником парламента Тулузы, на досуге изучал математику. Ферма раньше Декарта

ввел прямолинейные координаты, в работе «Введение к теории плоских и пространственных мест» (1636) он показал, что прямым соответствуют уравнения 1-й степени, а коническим сечениям – уравнения 2-й степени, в работе «Метод отыскания наименьших и наибольших значений» он первым (за 34 года до И. Ньютона) пришел к дифференцированию. Его математические работы стали известны только в 1669 г., когда сын П. Ферма опубликовал сборник математических рукописей покойного отца.

Какое же отражение все это находит в учебниках математики? Практически никакого. В школьных учебниках говорить об этом еще рано, а в вузовских учебниках в основном уделено внимание прикладному значению математики, а значит, ее роли в развитии техники, экономики и т.п. И как правило, ни слова об общекультурной роли математики и ее месте в системе культурных ценностей, созданных человечеством. Открыл бы или нет Г. Ом свой закон, но так или иначе он (закон) существовал до Г. Ома, во время Г. Ома и будет существовать всегда. Все, чем занимается математика, создано человеком, существует и развивается в его сознании. Математические открытия, как и произведения искусства, неся в себе отпечаток творческой личности автора, являются достоянием всего человечества. Многие удивляются тому факту, что Нобелевские премии в области математики не присуждаются, распространено досужее мнение, что А. Нобель не включил математику в перечень по причинам сугубо личного характера (якобы из-за того, что его возлюбленная предпочла его математику). Это далеко не так. А. Нобель, тщательно работая над положением о премиях и перечнем наук, несколько раз включал и исключал математику.

Своим окончательным решением об исключении математики он закрепил за ней тот особый статус в системе наук, о котором мы уже говорили. В преамбуле положения о Нобелевских премиях в области науки сказано, что они присуждаются за достижения в области наук, которые непосредственно служат человечеству. Как могут непосредственно служить человечеству математические открытия, которые относятся к свойствам образов (объектов), существующих в нашем сознании? Правда, среди лауреатов этой премии имеются и математики – выдающийся российский математик Л.В. Канторович получил Нобелевскую премию по экономике, а математик по образованию А.И. Солженицын получил Нобелевскую премию по литературе. Интересно, что они оба имеют непосредственное отношение к РГУ (ныне ЮФУ). А.И. Солженицын – выпускник отделения математики физмата РГУ 1941 г., а Л.В. Канторович – научный руководитель профессора, доктора физико-математических наук, лауреата Государственной премии СССР, крупного специалиста в области имитационного моделирования эколого-экономических систем А.Б. Горстко, много лет работавшего на мехмате РГУ.

Включение математики в ФГОС ВПО всех направлений и специальностей, в том числе гуманитарных, также является признанием особой роли математики. В связи с этим в современных учебниках математики, особенно для гуманитариев, должно быть уделено внимание математике как явлению не только науки, но и культуры. Авторы ФГОС ВПО имели это в виду. Вот что говорится в пояснительной записке к курсу математики для гуманитариев: «На основе этой программы выпускник должен получить базовое общее высшее образование, способствующее

дальнейшему развитию личности. В этой программе *не следует особенно акцентироваться на будущую профессиональную деятельность, но следует создать общее видение мировоззренческого характера* (курсив наш. – Я.Е.). Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки бакалавра и специалиста. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

Целью математического образования является развитие:

- навыков математического мышления;
- навыков использования математических методов и основ математического моделирования;
- математической культуры у обучающегося.

Развитие математической культуры студента должно включать в себя ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке, выработку представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений».

Показателен в этом отношении и список литературы к этой программе:

Литература

Основная

1. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. М., Просвещение, 1985.
2. История математики / Под ред. А.П. Юшкевича. Т. 1–3. М.: Наука, 1970–1972.

3. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991.
4. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1985.
5. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М.: Наука, 1990.
6. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М.: Просвещение, 1967.
7. Математика в понятиях и терминах / Под ред. Л.В. Сабина. Т. 1, 2. М.: Просвещение, 1978, 1982.
8. Математика в современном мире. М.: Мир, 1967.
9. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
10. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1970.
11. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М.: Физматлит, 1987.
12. Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. Математика: учебный курс для юристов. М.: Юрайт, 2000.
13. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика. М.: Мир, 1966.
14. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике. М.: АГАР, 1999.

Дополнительная

1. Бирхгофф Г. Математика и психология. М.: Сов. радио, 1977.
2. Гильде В. Зеркальный мир. М.: Мир, 1982.
3. Гильдерман Ю.И. Закон и случай. Новосибирск: Наука, 1991.
4. Комацу М. Многообразие геометрии. М.: Знание, 1981.
5. Стили в математике: социокультурная философия математики / Под ред. А.Г. Барабашева. СПб.: РХГИ, 1999.
6. Стюарт И. Тайны катастрофы. М.: Мир, 1982.
7. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. Киев: Вища школа, 1988.
8. Турецкий В.Я. Математика и информатика. Екатеринбург, 1998.
9. Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. Как рисовать математические картинки. М.: Мир, 1991.

В этом списке всего два учебных пособия по математике, все остальное – литература по теме «Математика и культура». Что касается учебного пособия под номером 12 из приведенного списка, то и введение в него, и специальный параграф «Математика и культура» свидетельствуют о том, что авторы остались на восприятии математики как науки, возникшей из практических потребностей челове-

ства, остающейся таковой или ставшей еще более прикладной в настоящее время. Проиллюстрируем это цитатами. «Известные нам числа 1, 2, 3... называются натуральными. Их используют для счета или обозначения количества предметов, например: один юрист, два юриста и т.д. Кроме того, с помощью натуральных чисел обозначают порядок предметов. Например, если всех милиционеров в отделении выстроить по росту, то каждому из них можно присвоить номер: первый милиционер, второй милиционер и т.д.» Представляю себе смех в аудитории или улыбку читателя, узнавшего, что юристы и милиционеры являются предметами. Взяв такой старт в первом параграфе, авторы в главе «Математика и культура» не пошли дальше вульгарного представления о математике, ее месте и роли: «Культурой (в широком смысле) называют совокупность материальных и духовных ценностей, накопленных человечеством за определенную историческую эпоху. И какой бы исторический отрезок мы ни взяли, какими бы историческими рамками мы ни ограничились, там всегда присутствует математика. Это и понятно, людям всегда надо было считать, измерять, производить вычисления, чтобы строить, торговать, делать календарные расчеты, делить урожай, собирать налоги и т.д. Поэтому математика зародилась значительно раньше других наук». Ясно, почему авторы «забыли» о философии, да и как не забыть, ведь с этой точки зрения она вообще не должна была возникнуть. Идем дальше по этой главе. «Развитие математики стимулировали прежде всего экономические факторы». Эту цитату трудно комментировать. Стимулирование развития с помощью экономических факторов в переводе на понятный язык – высокая оплата

труда математиков. Заканчивается эта «странная» глава обвинением всем точным наукам и математике. «Благодаря науке производство (и прежде всего развитие технологий) за последние два века достигло небывалых успехов. В нашем веке население большинства стран живет в таком комфорте, которого не могли себе даже вообразить современники Бетховена и Гёте. Поэтому постепенно наука – а под этим термином стали понимать в первую очередь точные науки – заняла в умах людей и общественном мнении важное место. В итоге в XX веке произошло то, чего раньше не было и в помине – государство, корпорации и даже частные лица стали финансировать научные исследования (интересно, что делала Екатерина, основав Российскую академию наук? – Я.Е.). Так произошло преувеличение роли точных наук, и в первую очередь, конечно, математики, на которой все эти науки основаны. Возникло (даже в среде специалистов!) представление о всемогуществе математических методов; а поскольку математический язык весьма сложен и специфичен, то в умах обывателей математика стала ассоциироваться с чем-то вроде магии». Удивительно, что этот текст вышел из-под пера людей, которые причисляют себя к математикам. Что касается финансирования науки государством, корпорациями и частными лицами, то в современную инновационную эпоху развития человечества проигрывает та страна, те корпорации, которые не вкладываются в науку и образование. Авторы перепутали все, что можно и нельзя перепутать, назвав математику основой (а не инструментом) всех наук. Самое главное, чего нет в этом учебном пособии, – это представления о математике как о специфической области духовной деятельности человека, о ее

особой роли в истории развития человечества. Нет никаких объективных (экономических, производственных и т.п.) причин или потребностей для создания и развития теории категорий, теории гомологий и прочих абстрактных разделов математики. Не видно никаких прикладных задач или других потребностей человечества, которые бы привели Б. Кавальери к формулировке его изумительного принципа: «Если площади всех соответствующих параллельных сечений двух тел одинаковы, то эти тела имеют равные объемы». Этот принцип – подлинное проявление могущества человеческой мысли и ее величайшей способности к обобщениям.

Возвратимся к теме нашей работы и с глубоким сожалением отметим, что не существует (т.е. автору этой статьи они неизвестны) общих учебников математики, в которых была бы достаточно хорошо изложена тема «Математика и культура» (мы не имеем в виду специальные учебные пособия, предназначенные для будущих математиков, философов, культурологов (см., например, [4])).

В учебнике по дискретной математике [1] сделана попытка как-то преодолеть отмеченный недостаток. В нем имеется следующее отступление о красоте математики: «Основным критерием истинности в математике является логическая безупречность доказательства. Однако автор этого курса смеет утверждать, что существует еще одно необходимое условие истинности математического утверждения. Это условие эстетическое – “верным” в математике может быть только “красивый результат”, а “справедливым” – только “красивое доказательство”. Если доказательство “некрасиво”, то либо оно неверно, либо есть другое “красивое” доказательство.

Наличие эстетического начала в содержании и в методах математики выделяет ее в ряду других наук (как естественных, так и гуманитарных) и придает ей особый характер. Красота и гармония математики (вплоть до самых ее абстрактных разделов) вдохновляла и вдохновляет не только математиков, но и поэтов, композиторов, художников, скульпторов. Более того, в течение тысячелетий продолжают попытки (к счастью, бесплодные) обратить утверждение о красоте математики, получив математические критерии эстетичности (теория золотого сечения, математические основы стихосложения и т.п.). Ясно, что сводимость эстетического к математическому не может быть доказана, однако отрицать наличие связи между ними не приходится, и, значит, имеют право на жизнь математическая живопись, музыка, поэзия, как и живописная, музыкальная, поэтическая математика».

Сами учебники математики должны быть (и бывают) не только продуктами педагогического и математического творчества, они должны быть в некотором роде и произведениями искусства. Такой подход к вузовским учебникам математики получил в настоящее время достаточно широкое распространение. Многие современные учебники снабжены эпиграфами, цитатами из художественных произведений. Порой это позволяет лучше понять существо дела или просто создает особый эмоциональный настрой у читателя. Одним из пионеров такого художественного подхода является один из крупнейших специалистов по теории графов Ф. Харари. Его учебник по теории графов [7] написан не только на высоком научном и методическом, но и на высоком художественном уровне. Все главы учебника и даже оглавление снабжены эпиграфами, а строгий

академический стиль умеренно разбавлен полными юмора авторскими отступлениями.

Приведем примеры из этого учебника. Глава «Графы», в которой даны основные определения, имеет эпиграф: «Что значит имя? Роза пахнет розой, хоть розой назови ее, хоть нет» (В. Шекспир. Ромео и Джульетта). Главе «Деревья» предшествует эпиграф: «Поэмы создают глупцы, как я и сам, но дерево создать под силу лишь богам» (Килмер Джойс. Деревья). А вот пример авторского отступления из этого учебника: «Гипотезу четырех красок можно еще с полным основанием назвать “болезнью четырех красок”, так как она очень похожа на заболевание. Она в высшей степени заразна. Иногда она протекает сравнительно легко, но в некоторых случаях приобретает затяжной или даже угрожающий характер. Никаких прививок против нее пока не существует (это написано до того, как К. Аппель и В. Хакен нашли фантастически сложное компьютерное доказательство справедливости этой гипотезы. – Я.Е.); правда, люди с достаточно здоровым организмом после короткой вспышки приобретают пожизненный иммунитет. Этой болезнью человек может болеть несколько раз, и она может сопровождаться острой болью, но ни одного летального исхода зарегистрировано не было. Известен, по крайней мере, один случай передачи болезни от отца к сыну, так что, может быть, она наследственна». А вот пример эпиграфа, создающего особый эмоциональный настрой: «Они спешат, они ползут – одна вослед другой. За Плотником и за Моржом веселою гурьбой» (Льюис Кэрролл. Алиса в стране чудес). Не сразу догадаешься, что это эпиграф к списку литературы.

Следует приветствовать тот факт, что эти приемы начинают осваивать и ав-

торы российских учебников. Одним из удачных примеров является задачник В.Д. Кряквина [5]. Тонким юмором и тщательным подбором цитат отличается фундаментальный труд А.А. Зыкова [3]. На одной из страниц этого учебника приведен рисунок, содержащий два графа – G_1 и G_2 , комментарий к рисунку и цитата из Конфуция, сопровождающая комментарий. Комментарий – «Здесь фактически приведены не два, а три примера: граф G_1 , изображенный слева, граф G_2 , изображенный справа, весь чертеж тоже можно считать изображением одного графа – несвязного, состоящего из двух компонент». Цитата из Конфуция – «Когда перед нашим взором – волк и овца, то вы видите не два объекта, а, по крайней мере, три: волка, овцу и пару, состоящую из них (русский вариант: “Ты да я, да мы с тобой”))». Представляется, что после такого комментария и такой цитаты никто из читателей не забудет, что каждая компонента графа – граф, но граф может состоять и из нескольких компонент. Автор этой книги пошел еще дальше. В ней имеется шуточный гимн теории графов (музыка и текст). Текст гимна был сочинен чешским математиком Б. Зелинкой. Перевод на русский язык осуществлен А.А. Зыковым и И.И. Потоцким в 1998 г., а музыка к гимну принадлежит чешскому математику З. Рьячеку. Завершают книгу фотографии выдающихся математиков современности, занимающихся теорией графов. Их одухотворенные лица свидетельствуют о том, что математика не только развивает человека, но доставляет ему эстетическое удовольствие.

Наш личный опыт свидетельствует, что учебники, написанные в таком «художественном» стиле, вызывают больший интерес у студентов, чем «традиционные», в которых порой

не ощущается личность автора. Как видно, знания усваиваются не только умом, но и душой.

Требование «художественности» нельзя считать необходимым для каждого учебника математики. Трудно найти автора, обладающего одновременно необходимыми математическими, педагогическими, методическими способностями и соответствующим культурным уровнем и художественным вкусом. Цена бриллианта определяется не только весом, но и чистотой и качеством огранки (чем больше граней, тем лучше).

Таким образом, сформулированное в начале статьи требование к современному учебнику математики быть элементом (явлением) культуры состоит из двух частей:

В учебнике математики должен быть уделено внимание математике как элементу культуры.

Учебник должен быть написан в «художественном» стиле, способном вызывать необходимые эмоции и ассоциации у читателя, т.е. сам учебник должен быть явлением культуры.

Литература

1. *Ерусалимский Я.М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 10-е изд. М.: Вузовская книга, 2009.
2. *Ерусалимский Я.М.* Современный учебник математики и требования к нему // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. 2010. № 1. С. 41–49.
3. *Зыков А.А.* Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.
4. *Казарян В.П., Лолаев Т.П.* Математика и культура: учеб. пособие / под ред. С.А. Лебедева. Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1999.
5. *Кряквин В.Д.* Линейная алгебра в задачах и упражнениях. М.: Вузовская книга, 2006.
6. *Манин Ю.И.* Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008.
7. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.